

Introducción al tema de relaciones de recurrencia

↳ recursividad

Por ejemplo:

suponga que una persona posee una deuda en una entidad bancaria. Si no paga el monto del préstamo al final de cada mes, la entidad le cobra un interés de un 5% sobre el monto adeudado. Si se asume un préstamo de 300 000 colones, ¿cuánto dinero deberá al cabo de n meses, $n=12$ si no ha pagado ninguna de las cuotas?

$$a_n = a_{n-1} + 0.05 \cdot a_{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 1.05 a_{n-1} \\ a_0 = 300\,000 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1.05 a_{n-1} \\ &= 1.05 \cdot 1.05 \cdot a_{n-2} \\ &= (1.05)^2 \cdot a_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &= (1.05)^n a_{n-n} \\ &= (1.05)^n a_0 \\ &= (1.05)^n 300\,000 \end{aligned}$$

Luego: $n=12$

$$\begin{aligned} a_{12} &= (1.05)^{12} \cdot 300\,000 \\ &= 538\,760 \end{aligned}$$

Definición ✓

Sea una sucesión de números reales a_0, a_1, \dots . Una relación de recurrencia sobre los elementos de la sucesión, es una ecuación que relaciona el término a_n con alguno de sus antecesores a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Sujeta \rightarrow condiciones iniciales

Tal es el caso de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

Si tenemos entonces:

$$\begin{cases} a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \beta_3 a_{n-3} \\ a_1 = c_1 \\ a_2 = c_2 \\ a_3 = c_3 \end{cases}$$

Veamos otro ejemplo

considere la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

Halle con Mathematica los elementos de la sucesión para $n = 2, 3, \dots, 20$

$$a_2 = 2a_1 - 3a_0 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 3a_1 = -2$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

⋮

a_{20}

código: `RecurrenceTable[{a[n] == 2 a[n-1] - 3 a[n-2],
a[0] == 1, a[1] == 4}, {a, {n, 2, 20}}`

out[]

{5, -2, -19, ..., 88925}

Un ejemplo más:

Verifique a través del software Mathematica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \checkmark$$

con a_n la sucesión de Fibonacci.

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Golden Ratio

La propuesta de solución:

In[]

$a[1] = a[2] = 1;$ ✓

$a[n_Integer?Positive] := a[n-1] + a[n-2]$ ✓

→ $b[n_Integer?Positive] := \frac{a[n+1]}{a[n]}$ ✓

→ $n = \text{Input}["\text{Digite la cantidad de pruebas:}"];$

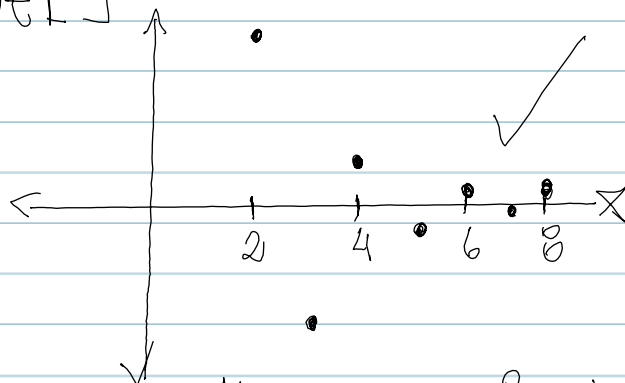
$L = \text{ConstantArray}[0, \{n, 2\}];$

For [$i = 1, i \leq n, L = \text{ReplacePart}[L, i, \{1, 1\}];$

$L = \text{ReplacePart}[L, \{n, b[i] - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\}, \{1, 2\}]; i++]$

→ $\text{ListPlot}[L, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{PointSize}[0.02]]$

Out[]

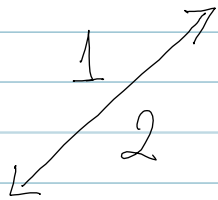


Ejemplo

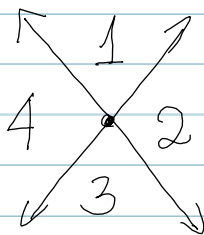
Si se tienen " n " líneas rectas que dividen a un plano (Π), sea a_n el número de regiones en las cuales el plano Π es dividido. Se sabe que las rectas se cortan dos a dos en un único punto. Halle una relación de recurrencia para " a_n " y determine el número de regiones en las que quedaría dividido Π con $n=7$.

$$a_n \rightarrow a_7$$

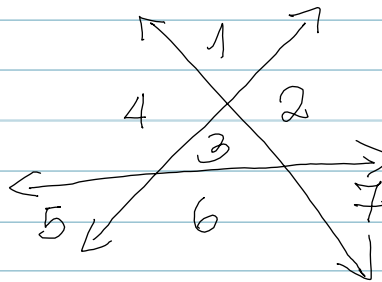
$$n=1$$



$$n=2$$



$$n=3$$



$$n=1 \Rightarrow a_1 = 2 \checkmark$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 4 = a_1 + 2$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 7 = a_2 + 3$$

⋮

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases} \checkmark$$

En el software mathematica a_7 se calcula así:

$$a[1] = 2;$$

$$a[n_Integer?Positive] := a[n-1] + n$$

$$a[7]$$

↓

29

(Π)

7 rectas

Ejemplo

Determine como una recursión el número a_n de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

$$|X| = n \Rightarrow |P(X)| = 2^n$$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\{y\} \in X \text{ no contienen } \rightarrow \{y\}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

$$x_1 \cup \{y\}, x_2 \cup \{y\}, \dots, x_k \cup \{y\}$$

$$n-1$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ con } a_0 = 1$$

Resolve, en este caso

$$\text{Resolve } \{a[n] == 2 * a[n-1], a[0] == 1\}, a[n], n$$

Produce como salida

$$\{a[n] \rightarrow 2^n\}$$

Métodos

Otro ejemplo ✓

Considere la siguiente sucesión de números:

$$S = \{-1, 2, 7, 14, 23, \dots\}$$

Encuentre una relación de recurrencia para S y representela en el plano cartesiano.

Tabla

n	S
1	$a_1 = -1$
2	$a_2 = 2 = a_1 + 2 \cdot 2 - 1$
3	$a_3 = 7 = a_2 + 2 \cdot 3 - 1$
4	$a_4 = 14 = a_3 + 2 \cdot 4 - 1$
5	$a_5 = 23 = a_4 + 2 \cdot 5 - 1$

$$a_n = a_{n-1} + (2n-1), \quad a_1 = -1 \quad \checkmark$$

Mathematica cuenta con un comando interesante:

`FindSequenceFunction` $[-1, 2, 7, 14, 23], n$

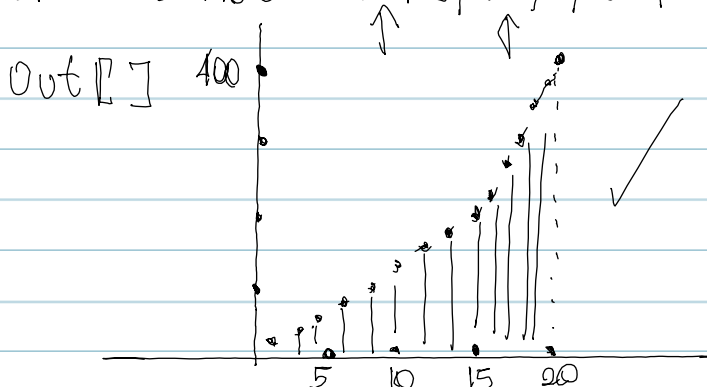
$$-2 + n^2$$

Para graficar a_n : $\left\{ \begin{array}{l} \text{DiscretePlot} \\ \text{ListPlot} \end{array} \right.$

$$a[1] = -1; \quad \checkmark \leftarrow$$

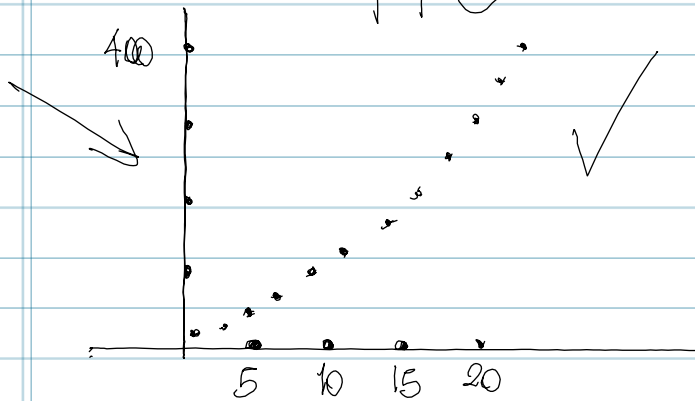
$$a[n_Integer?Positive] := a[n-1] + 2n-1 \quad \checkmark \leftarrow$$

`DiscretePlot` $[a[n], \{n, 1, 20\}]$



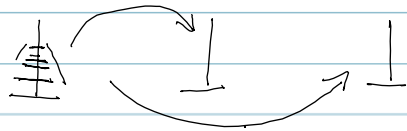
Can ListPlot:

$a[1] = -1$; ✓
 $a[n_Integer?Positive] := a[n-1] + 2n-1$ ✓
 ListPlot[Table[$a[n]$, { n , 1, 20}]]



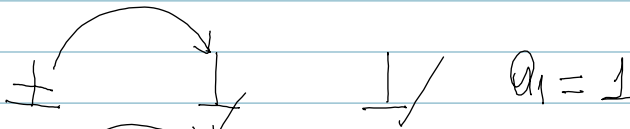
Ejemplo de las Torres de Hanoi

Fue inventado por el matemático francés Lucas M. Claus en 1883

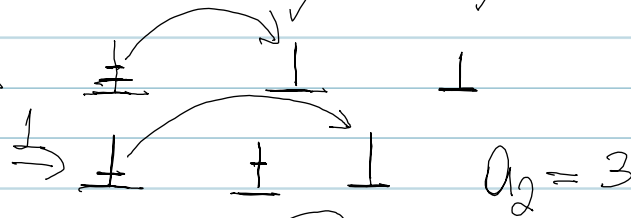


a_n

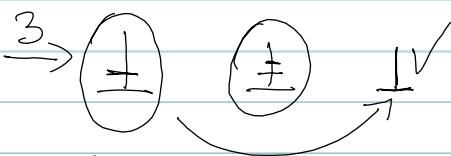
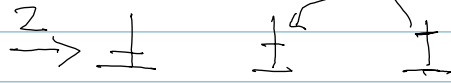
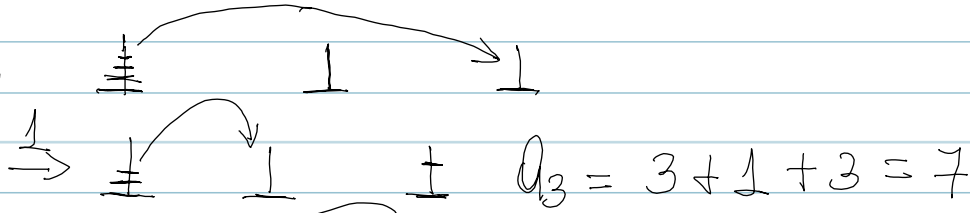
$n=1$



$n=2$



$n=3$



n

1

2

3

...

n

\$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3 = 2a_1 + 1$$

$$a_3 = 7 = 2a_2 + 1$$

\vdots

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \checkmark$$

En Mathematica:

$\text{RSolve}[\{a[n] == 2 * a[n-1] + 1,$
 $a[1] == 1\}, a[n], n]$

$\{a[n] \rightarrow -1 + 2^n\}$

Resolución de relaciones de recurrencia

$$a_n \rightarrow f(n)$$

1. iterativo
2. homogéneas lineales

Método iterativo ✓

se usa: $a_n \rightarrow f(n)$ ✓
 y se llama por iteraciones

No se usará un enfoque demostrativo

Ejemplo ✓

Resuelva la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 7$ con $a_0 = 3$.
 utilice el software Mathematica para verificar el resultado

$$a_n = 2a_{n-1} + 7 \checkmark$$

$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + 7$$

$$a_n = 2(2a_{n-2} + 7) + 7 = 2^2 a_{n-2} + 2 \cdot 7 + 7$$

$$a_{n-2} = 2a_{n-3} + 7$$

$$a_n = 2^2(2a_{n-3} + 7) + 2 \cdot 7 + 7 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 7$$

∴ a_0

$$a_n = 2^n a_{n-n} + 7(2^{n-1} + \dots + 1) = 2^n a_0 + 7(2^{n-1} + \dots + 1) \xrightarrow{a_0=3}$$

$$= 3 \cdot 2^n + 7(2^{n-1} + \dots + 1)$$

Recordando: $\sum_{j=0}^n r^j = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \in \mathbb{R}, r \neq 1, 2^{n-1} + \dots + 1 = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$
 $= 2^n - 1$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 a_n &= 3 \cdot 2^n + 7(2^n - 1) \\
 &= 10 \cdot 2^n - 7 \\
 &= 5 \cdot 2 \cdot 2^n - 7 \\
 &= \underline{5 \cdot 2^{n+1} - 7}, \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

En Mathematica:

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \text{RSolve}[\{a[n] == 2 * a[n-1] + 7, a[0] == 3, \\
 &\quad a[n], n\} \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad \{a[n]\} \rightarrow \underline{-7 + 5 \cdot 2^{1+n}} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Otra forma de verificación:

$$\begin{aligned}
 &a[n-1] := 2 a[n-1] + 7 \quad \checkmark \\
 &a[0] = \textcircled{3} \quad \checkmark \\
 &\rightarrow L = \{a[0]\}; \\
 &\rightarrow m = \text{Input}["\text{Digite la cantidad de iteraciones:}"]; \\
 &\quad \checkmark \text{For}[i = \textcircled{1}, i \leq \textcircled{m}, L = \text{Append}[L, a[i]]; i++] \\
 &\quad \text{FindSequenceFunction}[L, n] \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\rightarrow \underline{-7 + 5 \cdot 2^{\textcircled{n}}} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Ejemplo

Determine por medio de una fórmula explícita los elementos de la sucesión dada por la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2 + 3^{n-1}$ ✓ con $a_0 = 1$. Verifique el resultado utilizando el comando RSolve.

$$\begin{aligned} \text{En } n &\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2 + 3^{n-1} \checkmark \\ \text{En } n-1 &\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-2} + 2 + 3^{n-2} \\ &\Rightarrow a_n = a_{n-2} + 4 + 3^{n-2} + 3^{n-1} \checkmark \\ \text{En } n-2 &\Rightarrow a_{n-2} = a_{n-3} + 2 + 3^{n-3} \\ &\Rightarrow a_n = a_{n-3} + 6 + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a_n = a_0 + 2n + (3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1}) \checkmark$$

$$\sum_{j=0}^n r^j = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \in \mathbb{R}, r \neq 1$$

$$3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} 3^j = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Finalmente:

$$a_n = 1 + 2n + \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 4n + 1}{2}, \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \checkmark$$

En el software Mathematica:

$$\rightarrow \text{RSolve}[\{a[n] == a[n-1] + 2 + 3^{n-1}, a[0] == 1, \\ a[n], n\}$$

$$\{a[n] \rightarrow \frac{1}{2}(1 + 3^n + 4n)\} \checkmark$$

Ejemplo ✓

Resuelva por el método iterativo y con ayuda de Mathematica, la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + n$, con $a_0 = 5$.

$$\text{En } n \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} + n$$

$$\text{En } n-1 \Rightarrow a_{n-1} = 3a_{n-2} + (n-1)$$

$$\Rightarrow a_n = 3^2 a_{n-2} + 3(n-1) + n$$

$$\text{En } n-2 \Rightarrow a_{n-2} = 3a_{n-3} + (n-2)$$

$$\Rightarrow a_n = 3^3 a_{n-3} + 3^2(n-2) + 3(n-1) + n$$

Se conjetura: ↓

$$a_n = 3^n a_0 + 3^{n-1} \cdot 1 + 3^{n-2} \cdot 2 + \dots + 3(n-1) + n$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^n + 3^{n-1} \left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-2}} + \frac{n}{3^{n-1}} \right)$$

$$\text{Simplify } \left[\sum_{j=0}^n \frac{j}{3^{j-1}} \right] \Rightarrow \frac{1}{4} 3^{1-n} (-3 + 3^{1+n} - 2n)$$

$$a_n = \frac{23 \cdot 3^n - 3 - 2n}{4}, \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Al usar el comando RSolve:

$$\text{RSolve}[a[n] == 3 * a[n-1] + n, a[0] == 5, a[n], n]$$

$$\{ \{ a[n] \rightarrow \frac{1}{4} (-3 + 23 \cdot 3^n - 2n) \} \}$$

Ejemplo ←

→ Una persona invierte 500 000 colones al 13% de interés compuesto anual. Encuentre y resuelva una relación de recurrencia que represente la cantidad de dinero después de n años.

+ → \$

$a_n \rightarrow n$ años ; $a_0 = 500\,000$

$$a_n = a_{n-1} + 0.13 \cdot a_{n-1} = 1.13 a_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 1.13 a_{n-1} \\ a_0 = 500\,000 \end{array} \right\}$$

Método iterativo

En $n \Rightarrow a_n = 1.13 a_{n-1}$

En $n-1 \Rightarrow a_{n-1} = 1.13 a_{n-2} \Rightarrow a_n = (1.13)^2 \cdot a_{n-2}$

En $n-2 \Rightarrow a_{n-2} = 1.13 a_{n-3} \Rightarrow a_n = (1.13)^3 \cdot a_{n-3}$

⋮

$$a_n = (1.13)^n \cdot a_{n-n} = 500\,000 (1.13)^n, \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

En el software Mathematica:

$$\text{RSolve}[a[n] == 1.13 \cdot a[n-1], a[0] == 500\,000, \{a[n], n\}]$$

$$\rightarrow a[n] \rightarrow 500\,000 \times 0.884956^n$$

\uparrow \downarrow
 1.13

Ejemplo

Una fábrica se dedica al diseño de automóviles deportivos.
 En su primer mes de apertura fabricó un auto, en su segundo mes dos y en su tercer mes de operaciones construyó tres vehículos.
 De acuerdo con este comportamiento, establezca una relación de recurrencia que cuente el número total de autos fabricados después de $n^{\text{º}}$ meses. Resuelva la relación de recurrencia correspondiente. Verifique el resultado utilizando el software Mathematica.

$$\begin{aligned} & \boxed{Q_0 = 0} \\ & Q_1 = 1 = Q_0 + 1 \\ & Q_2 = 3 = Q_1 + 2 \\ & Q_3 = 6 = Q_2 + 3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + n, \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$$

Por el método iterativo:

$$\text{En } n \Rightarrow Q_n = Q_{n-1} + n$$

$$\begin{aligned} \text{En } n-1 \Rightarrow Q_{n-1} &= Q_{n-2} + n-1 \\ \Rightarrow Q_n &= Q_{n-2} + n-1 + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En } n-2 \Rightarrow Q_{n-2} &= Q_{n-3} + n-2 \\ \Rightarrow Q_n &= Q_{n-3} + n-2 + n-1 + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ Q_n &= Q_{n-n} + \overbrace{1 + 2 + \dots + n}^n \\ &= Q_0 + \sum_{j=1}^n j = 0 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

En Mathematica:

$$\text{RSolve}[\{a[n] == a[n-1] + n, a[0] == 0\}, a[n], n]$$

$$\rightarrow \{a[n] \rightarrow \frac{1}{2} n (1+n)\} \quad \checkmark$$

Otro ejemplo con el uso de software:

Conjeture la solución de la relación de recurrencia
 $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - j$ con $a_0 = 1, a_1 = 2$ y $j \in \mathbb{N}$

For $j = 1$ to 10 , Print["Para $j =$ ", j , " se obtiene:"],
 $\rightarrow \text{Simplify}[\text{RSolve}[\{a[n] == -a[n-1] - a[n-2] - j, a[0] == 1,$
 $a[1] == 2\}, a[n], n]]$; $j++$

Al analizar cada respuesta se observa:

$$j \text{ impar} \rightarrow \frac{1}{3} \checkmark$$

$$j \text{ par} \rightarrow \frac{1}{6} \checkmark$$

$\{2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13\}$

FindSequenceFunction[
 $\{2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13\}, n]$

$$\rightarrow \frac{1}{4} (3 + (-1)^n) (3 + n)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{2in\pi}{3}} [a + (a+1)i\sqrt{3} - j e^{\frac{2in\pi}{3}} + (a - (a+1)i\sqrt{3}) e^{\frac{4in\pi}{3}}], & j \text{ impar} \\ \frac{1}{6} e^{-\frac{2in\pi}{3}} [a + (a+2)i\sqrt{3} - 2j e^{\frac{2in\pi}{3}} + (a - (a+2)i\sqrt{3}) e^{\frac{4in\pi}{3}}], & j \text{ par} \end{cases}$$

$i = (0, 1)$ y $a = \frac{1}{4} [3 + (-1)^j] (3 + j)$

→ Relaciones de recurrencia homogéneas lineales.

Orden k

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \dots + \beta_k a_{n-k}$$

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}$$

$$t^k - \beta_1 t^{k-1} - \beta_2 t^{k-2} - \dots - \beta_k = 0$$

Teorema ✓

Sea la relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden k :

$$\begin{aligned} & a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} \\ \rightarrow & a_0 = c_0 \\ \rightarrow & a_1 = c_1 \end{aligned}$$

$$t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0$$

→ (1.) $r_1 \neq r_2$; $a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n, \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(2.) r ; $a_n = b_1 r^n + b_2 n r^n, \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Si fuera de orden "3": $t^3 - \beta_1 t^2 - \beta_2 t - \beta_3 = 0$ ✓

1. r_1, r_2, r_3 , $a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n + b_3 r_3^n$

2. $\overline{r_1, r_2}$, $a_n = b_1 r_1^n + b_2 n r_1^n + b_3 r_2^n$

3. r ; $a_n = b_1 r^n + b_2 n r^n + b_3 n^2 r^n$

Ejemplo. Resuelva la relación de recurrencia de Fibonacci.

$$a_n = 1a_{n-1} + 1a_{n-2}, \quad a_0 = a_1 = 1$$

$$\rightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = b_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Sabemos:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} b_2 = 1 \end{cases}$$

Solve

$$\text{Solve } \left[\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} b_2 = 1 \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} b_1, b_2 \end{matrix} \right] \rightarrow \left[\begin{matrix} b_1 \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, b_2 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{matrix} \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Mathematica cuenta con el comando Linear Recurrence ←

Linear Recurrence [$\downarrow \downarrow$ $\downarrow \downarrow$ \downarrow]
 $[d_1, d_2, \dots, d_n, 20]$

→ $d_1, d_2, \dots, d_n, 20$
 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$ ✓

El software también cuenta con:

Find Linear Recurrence

Por ejemplo:

FindLinear Recurrence [\rightarrow $d_1, d_2, \dots, d_n, 20$]
 $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377]$

→ d_1, d_2

$$\begin{cases} a_n = 1 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Veamos otro ejemplo.

Considere la relación de recurrencia $3a_n = 7a_{n-1} - 2a_{n-2}$ sujeta a las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Encuentre con el comando Linear Recurrence los primeros 15 términos de la sucesión y resuelva la relación de recurrencia. Verifique el resultado por medio de RSolve.

$$\begin{aligned} 3a_n &= 7a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{7}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3}a_{n-2} \\ &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ &\quad \beta_1 \quad \quad \beta_2 \end{aligned}$$

En Mathematica:

$$\text{LinearRecurrence}\left[\left\{\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right\}, \{1, 2\}, \underline{15}\right] \downarrow$$

$$\rightarrow \{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 16384\}$$

Para resolver la relación de recurrencia:

$$t^2 - \frac{7}{3}t + \frac{2}{3} = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{3} \quad y \quad t_2 = 2$$

$$a_n = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + b_2 2^n \leftarrow$$

Sabemos:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ \frac{1}{3}b_1 + 2b_2 = 2 \end{cases}$$

Luego:

$$\text{Solve}\left[\left\{b_1 + b_2 = 1, \frac{1}{3}b_1 + 2b_2 = 2\right\}, \{b_1, b_2\}\right]$$

$$\rightarrow \{b_1 \rightarrow 0, b_2 \rightarrow 1\}$$

Finalmente:

$$a_n = 2^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Verificación:

$$\text{RSolve}\left[\{3a[n] == 7a[n-1] - 2a[n-2], a[0] == 1, a[1] == 2\}, a[n], n\right]$$

$$\rightarrow \{a[n] \rightarrow 2^n\}$$

Ejemplo

Sea la sucesión $\{3, 4, -16, -192, -1280, -7168, -36864, \dots\}$
 encuentre y resuelva una relación de recurrencia que la represente.

Con Mathematica:

FindLinearRecurrence[
 $\{3, 4, -16, -192, -1280, -7168, -36864\}$
 $\rightarrow \{8, -16\}$

Nos indica: $\uparrow \beta_1 \quad \uparrow \beta_2$
 $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ con $a_0 = 3$ y $a_1 = 4$

Para resolver esta relación de recurrencia:

$$t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 4$$

$$\rightarrow a_n = b_1 4^n + b_2 n 4^n$$

Al utilizar las condiciones iniciales se forma el sistema:

$$a_0 = 3 \Rightarrow b_1 = 3$$

$$a_1 = 4 \Rightarrow 4b_1 + 4b_2 = 4 \Rightarrow b_2 = -2$$

Por consiguiente:

$$a_n = 3 \cdot 4^n - 2n \cdot 4^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

RSolve verifica la solución:
 $\text{RSolve}[2a[n] == 8a[n-1] - 16a[n-2],$
 $a[0] == 3, a[1] == 4, a[n], n]$
 $\rightarrow \{a[n] \rightarrow -2^{2n}(-3 + 2n)\}$

Otro ejemplo

Resuelva la relación de recurrencia homogénea lineal de orden tres: $a_n = 9a_{n-1} - 26a_{n-2} + 24a_{n-3}$, con $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$.

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0$$

En Mathematica:

$$\text{Solve}[t^3 - 9t^2 + 26t - 24 == 0, t]$$

$$\rightarrow \{t \rightarrow 2, t \rightarrow 3, t \rightarrow 4\}$$

$$\Rightarrow a_n = b_1 2^n + b_2 3^n + b_3 4^n$$

Sabemos:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 2 \\ 4b_1 + 9b_2 + 16b_3 = 3 \\ 8b_1 + 27b_2 + 64b_3 = 4 \end{cases}$$

Mathematica:

$$\text{Solve}[2b_1 + 3b_2 + 4b_3 == 2, 4b_1 + 9b_2 + 16b_3 == 3, 8b_1 + 27b_2 + 64b_3 == 4, b_1, b_2, b_3]$$

$$\rightarrow \{b_1 \rightarrow 7/4, b_2 \rightarrow -2/3, b_3 \rightarrow 1/8\}$$

$$\text{Se concluye: } a_n = 7/4 2^n - 2/3 3^n + 1/8 4^n \quad \forall n, n \in \mathbb{N}$$

Verificando con RSolve:

$$\text{RSolve}[a[n] == 9a[n-1] - 26a[n-2] + 24a[n-3], a[1] == 2, a[2] == 3, a[3] == 4, a[n], n]$$

$$\rightarrow 1/24 (3 \times 2^{2n} + 21 \times 2^{1+n} - 16 \times 3^n)$$

Ejemplo
 Resuelva $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{a_{n-1}} + 3\sqrt{a_{n-2}}$ con $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

Solución: $c_n = \sqrt{a_n}$; β_1 β_2
 $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$ ✓
 $a_1 = 2 \Rightarrow c_1 = \sqrt{2}$ ✓
 $a_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \sqrt{3}$ ✓

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -1 \text{ y } t_2 = 3$$

$$c_n = b_1 (-1)^n + b_2 3^n$$

Luego: $\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_2 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b_1 + 3b_2 = \sqrt{2} \\ b_1 + 9b_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

En Mathematica: ✓

→ Simplify[Solve[$\{-b_1 + 3b_2 == \sqrt{2}, b_1 + 9b_2 == \sqrt{3}\}$,
 $\{b_1, b_2\}$]]

$$\rightarrow \{b_1 \rightarrow \frac{1}{4}(-3\sqrt{2} + \sqrt{3}), b_2 \rightarrow \frac{1}{12}(\sqrt{2} + \sqrt{3})\}$$

Finalmente:

$$c_n = \left(\frac{1}{4}(-3\sqrt{2} + \sqrt{3})(-1)^n + \frac{1}{12}(\sqrt{2} + \sqrt{3})3^n \right)^2$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\left[\frac{1}{4}(-3\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right] (-1)^n + \left[\frac{1}{12}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right] 3^n \right)^2$$

$n \in \mathbb{N}$

Otras relaciones de recurrencias interesantes:

$$\rightarrow a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \dots + \beta_k a_{n-k} + f(n)$$

\rightarrow www.itcr.ac.cr/revistamate \leftarrow

Vilchez, F. (2009) Resolución de relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes a través de valores y vectores propios.

\rightarrow Revista Virtual Matemática Educación e Internet. 10 (1).